2 Entscheidungskriterien in der datenfreien Situation

2.0 Vorbereitende Überlegungen

2.0.1 Entscheidungsregeln – Entscheidungsprinzipien

Bem. 2.1 (Entscheidungsregeln und Entscheidungsprinzipien)

- Eine Menge ist *linear geordnet* bzw. eine Ordnung $\prec$ ist *vollständig*, wenn für zwei Elemente a, b stets gilt

  $$a \prec b \text{ oder } a \succ b \text{ oder } a \sim b. \qquad (\sim : \text{äquivalent})$$

  Beispiele:
  $\mathbb{R}$ ist bezüglich der üblichen Ordnung vollständig geordnet, aber $\mathbb{R}^n$ etwa bezüglich der komponentenweisen Ordnung nicht.

- Mit *Entscheidungsregeln* bringt man die Aktionen in eine vollständige, lineare Ordnung

  \+ Ist der Aktionenraum endlich, dann gibt es „größte“/ „Beste“ Aktionen.

  – Allerdings: Für die konkrete Gestalt von Entscheidungsregeln gibt es i.a. keinen universalen Gültigkeitsanspruch.

- *Entscheidungsprinzipien* sind Grundsätze für die Auswahl von Aktionen, die beanspruchen, allgemeine Rationalitätsprinzipien zu sein.
  Dafür ist ihre „Ordnungskraft“ nicht so stark: Man wird im Allgemeinen nur gewisse ungünstige Aktionen als „unzulässig“ ausschließen können.

- Später werden wir sehen: Entscheidungsprinzipien sind unabhängig vom Unsicherheitsverständnis (ob Typ I oder Typ II), die Entscheidungsregeln hingegen nicht.

2.0.2 Zulässigkeit und Dominanzprinzip

Def. 2.2 (Dominanzrelationen)

Seien a_1, $a_2 \in \mathbb{A}$.

a) a_1 *dominiert* a_2 $\iff$

$$u(a_1, \vartheta) \geq u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \succeq a_2}$$

b) a_1 *dominiert* a_2 *strikt* $\iff$

$$u(a_1, \vartheta) \geq u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

und

$$u(a_1, \vartheta) > u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für mindestens ein } \vartheta \in \Theta$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \succ a_2}$$

c) a_1 *dominiert* a_2 *stark* $\Longleftrightarrow$

$$u(a_1, \vartheta) > u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \succ\succ a_2}$$

d) a_1, a_2 sind *äquivalent* $\Longleftrightarrow$

$$a_1 \succeq a_2 \quad \text{und} \quad a_2 \succeq a_1$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \sim a_2}$$

- Für äquivalente Aktionen gilt:

$$a_1 \sim a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad u(a_1, \vartheta) = u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

- Gemaß der in Bem. 1.6 postulierten Äquivalenz von Nutzen- und Verlustsicht kehren sich bei Verlusttafeln die „Vorzeichen“ in Def. 2.2 a) bis c) einfach um, z.B.:

$$a_1 \succeq a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad l(a_1, \vartheta) \leq l(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

- Die Dominanzrelationen gelten i.A. nicht für beliebige Paare von Aktionen: sie sind *nicht vollständig*. Sie liefern jedoch eine Klasseneinteilung der Aktionen.

Def. 2.3

Eine Aktion $a \in \mathbb{A}$ heißt *admissibel (zulässig)* $\Longleftrightarrow$

a wird von keiner Aktion strikt dominiert.

Die Aktion $a \in \mathbb{A}$ heißt *inadmissibel (unzulässig)* $\Longleftrightarrow$

Es gibt eine Aktion a', so dass $a' \succ a$.

Bem. 2.4 (Potentielle Inadmissibilität beim Übergang zur gemischten Erweiterung)

Vorsicht: Man kann bereits an einfachen Beispielen sehen, dass beim Übergang einer „reinen“ Aktionenmenge $\mathbb{A}$ zur gemischten Erweiterung $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ können in $\mathbb{A}$ zulässige Aktionen in $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ inadmissibel werden.

Def. 2.5 (Dominanzprinzip)

Im Folgenden werden zwei äquivalente Formulierungen gegeben:

> Dominiert die Aktion a_1 die Aktion a_2 strikt:
>
> $$a_1 \succ a_2\,,$$
>
> so ist es nicht vernünftig, die Aktion a_2 zu wählen.

oder:

> Es ist nicht vernünftig, eine inadmissible Aktion zu wählen.

Bem. 2.6

Das Dominanzprinzip ist das Rationalitätsprinzip der hier zugrunde gelegten Form der Entscheidungstheorie schlechthin.

Die in Bemerkung 1.6 der getroffenen Grundannahmen der Gültigkeit des Dominanzprinzips kann man somit als Test für das Zutreffen Savage-Modells ansehen.
Hat man bei der Betrachtung einer Entscheidungstafel das Gefühl, dass die Allgemeingültigkeit des Dominanzprinzips bezweifelt werden kann, muss man prüfen, ob nicht grundlegende Annahmen wie insbesondere die Handlungsunabhängigkeit der Zustände verletzt sind. ist.

Def. 2.7 (Vollständige Klassen)

a) Eine Teilmenge $\mathbb{C} \subset \mathbb{A}$ heißt *vollständig (complete)* $\Longleftrightarrow$
Für jede Aktion $a \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$ gibt es ein $a^* \in \mathbb{C}$, so dass

$$a^* \succ a$$

b) Eine vollständige Klasse $\mathbb{C}_{\min}$ heißt *minimal(e) vollständige Klasse* $\Longleftrightarrow$ Es gibt keine echte Untermenge von $\mathbb{C}_{\min}$, die vollständig ist.

Bemerkungen:

i) vollständige Klassen müssen alle admissiblen Aktionen enthalten; sie können auch nicht-admissible Aktionen enthalten.

ii) minimal(e) vollständige Klassen müssen nicht existieren. Wenn eine minimal(e) vollständige Klasse $\mathbb{C}_{\min}$ existiert, dann gilt

$$\mathbb{C}_{\min} = \bigcap_{\mathbb{C}\text{vollstaendig}} \mathbb{C}$$

und

$$\mathbb{C}_{\min} = \mathbb{A}_{ad}$$

Die Vollständigkeit wurde mittels der strikten Dominanz definiert. Will man äquivalenten Aktionen explizit in die Betrachtung einbeziehen, geht man zu einer Variante von Definition 2.7 über:

Def. 2.8

Eine Aktionenmenge $\mathbb{C} \subset \mathbb{A}$ heißt *wesentlich vollständig (essentially complete)* $\Longleftrightarrow$
Zu jeder Aktion $a \in \mathbb{A}$ (oder $\mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$) gibt es ein $a' \in \mathbb{C}$, so dass

$$a' \succeq a\,.$$

Bem. 2.9

Eine minimale wesentlich vollständige Klasse bildet die weitestgehende Reduktion eines Entscheidungsproblems auf seinen „wesentlichen“ Kern. Sie enthält aus jeder Äquivalenzklasse von admissiblen Aktionen genau einen Repräsentanten.

2.0.3 Optimalitätskriterien

Def. 2.10 (Optimalitätskriterium / Entscheidungsregel)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$.

Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ a &\mapsto \Phi(a) \end{aligned}$$

heißt *q-stufiges Optimalitätskriterium* oder *Entscheidungskriterium*.

Die Entscheidungsregel lautet dann: Suche

$$a^* \in \mathbb{A} \quad \text{mit} \quad \Phi(a^*) \geq \Phi(a) \qquad \forall a \in \mathbb{A}\,. \tag{2.1}$$

a^* heißt dann Φ-*optimale Aktion*, wobei im Fall $q \geq 2$ „$\geq$“ die lexikographische Ordnung meint.

Der lexiographischen Ordnung geht eine inhaltliche Hierarchie der Komponenten voraus, die erste ist die Wichtigste. (Z.B. siehe später, zunächst erwarteter Gewinn, dann Risiko kleiner.)

Bem. 2.11 (Nichtexistenz optimaler Aktionen)

Es muss weder eine optimale noch eine zulässige Aktion existieren.

Bem. 2.12

Es scheint mir nützlich, den Begriff der wesentlichen Vollständigkeit auch auf Optimalitätskriterien auszudehnen. Man würde dann eine Klasse $\mathbb{C}_\Phi \subset \mathbb{A}$ als *wesentlich vollständig bezüglich dem Optimalitätskriterium* Φ bezeichnen, wenn es zu jedem $a \in \mathbb{A}$ ein $a' \in \mathbb{C}_\Phi$ gibt, so dass $\Phi(a') \geq \Phi(a)$.

2.0.4 Metaregeln

- **Ziel:** Metaregeln, also Regeln, die Regeln regeln; Entscheidungstheorie der Entscheidungsregeln. ‚Meta' heißt „eine Stufe darüber" (Metatheorie; Metaphysik). Metaregeln sollen also Regeln für Entscheidungsregeln angeben: Was soll eine vernünftige Entscheidungsregel leisten?

- Es erhebt sich die Frage, ob man aus der Menge der denkbaren Optimalitätskriterien besonders „gute“ auswählen kann. Das kann man mithilfe von Rationalitätspostulaten versuchen. Rationalitätspostulate kann man als „Regeln über Regeln“ ansehen, das heißt, als Metaregeln.

- Es gibt nun zwei Möglichkeiten, Entscheidungsregeln „auf die Probe zu stellen“. Man kann

  * Postulate für das Entscheidungskriterium Φ angeben, wobei man dieses – bei endlichem Θ und nach der Identifikation von Aktionen mit den zugehörigen Nutzenvektoren – als reelle Funktion in m Variablen betrachtet. Φ wird dabei also nicht nur auf $\mathbb{A}$ angewendet, sondern auf $\mathbb{R}^m \supseteq \mathbb{A}$, also sozusagen auf alle denkbaren Nutzenpunkte.

  * Forderungen an die Invarianz der Ordnung stellen, die durch das Entscheidungskrietrien Φ induziert wird.

Def. 2.13 (Kompatibilität mit der Dominanzrelation)

Ein Optimalitätskriterium Φ ist kompatibel mit der Dominanzrelation, wenn für alle $a, b \in \mathbb{A}$ gilt:

$$a \preceq b \quad \Longrightarrow \quad \Phi(a) \leq \Phi(b) \tag{2.2}$$

$$a \prec b \quad \Longrightarrow \quad \Phi(a) \leq \Phi(b) \tag{2.3}$$

$$a \prec\!\!\prec b \quad \Longrightarrow \quad \Phi(a) < \Phi(b) \tag{2.4}$$

Bem. 2.14 (Mögliche Inadmissibiltät optimaler Aktionen)

Bem. 2.15 (Postulate für Optimalitätskriterien)

Sei Θ endlich. Dann werden folgende Eigenschaften des Optimalitätskriteriums $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ als wünschenswert erachtet:

a) Kompatibilität mit der Dominanzrelation

b) Φ ist stetig.

c) Normierung

$$\Phi((0, \ldots, 0)^T) = 0$$

d) Verschiebungsadditivität:

$$\Phi(\vec{a} + (d, \ldots, d)^T) = \Phi(\vec{a}) + d$$

Mit c) zusammen erhält man die Konstantenerhaltung: Für alle $d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Phi((d, \ldots, d)^T) = d$$

e) Positive Maßeinheitsinvarianz: Für alle $c > 0$ gilt:

$$\Phi(c \cdot \vec{a}) = c \cdot \Phi(\vec{a})$$

Bem. 2.16 (Axiomensysteme für induzierte Präferenzordnungen)

Sei wieder Θ endlich. Dann werden insbesondere folgende Forderungen an die von Φ induzierte Präferenzenordnung gestellt:

I. Nutzenlinearität:
   Die durch Φ induzierte Präferenzordnung soll ungeändert bleiben, wenn die jeweiligen Nutzenwerte positiv linear transformiert werden:

$$\begin{aligned} u_{ij} \Longrightarrow c + d \cdot u_{ij}\,; \quad d > 0 \\ i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

II. Änderung der Aktionenmenge:
Wird aus der Entscheidungstafel eine Aktion entfernt, so soll die durch Φ induzierte Präferenzordnung auf den restlichen Aktionen ungeändert bleiben.

Das Nichterfülltsein dieses Axioms ist der Haupteinwand gegen die später betrachteten „Regeln 2. Art“.

III. Streichen / Verkoppeln von gleichen Spalten:
Die durch Φ induzierte Präferenzordnung soll ungeändert bleiben, wenn zwei identische Spalten zu einer zusammengefasst werden oder wenn eine dieser Spalten gestrichen wird.

IV. Spaltenlinerität:

Die durch Φ induzierte Präferenzordnung soll ungeändert bleiben, wenn für einen beliebigen Zustand ϑ_j die Spalte der Nutzenwerte um einen konstanten Betrag verändert wird

$$\begin{array}{ccc} u_{1j} & & u_{1j}+c \\ u_{2j} & \longrightarrow & u_{2j}+c \\ \vdots & & \vdots \\ u_{mj} & & u_{mj}+c \end{array}$$

2.1 Minimax/Maximin Aktionen

Das Kriterium: Motivation und Definition

Bsp. 2.17 (Motivationsbeispiel Kuchen teilen) , *vgl. das Bsp. in Abschnitt 1.3.3*

Def. 2.18 (Maximin/Minimax-Aktion)

a) Gegeben sei ein datenfreies Enscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ in Nutzenform.

Dann heißt $a^* \in \mathbb{A}$ *Maximin-Aktion*, wenn

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} u(a^*, \vartheta) \geq \inf_{\vartheta \in \Theta} u(a, \vartheta) \quad \forall a \in \mathbb{A}. \tag{2.5}$$

b) Bei einem datenfreien Entscheidungsproblem in Verlustform $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$ heißt $a^* \in \mathbb{A}$ *Minimax-Aktion*, wenn gilt

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} l(a^*, \vartheta) \leq \sup_{\vartheta \in \Theta} l(a, \vartheta) \quad \forall a \in \mathbb{A}. \tag{2.6}$$

Bem. 2.19

Man verwendet als Kriteriumsfunktion

$$\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$$
$$a \mapsto \mathbb{R}$$

bzw.

$$\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$$
$$a \mapsto \sup u(a, \vartheta)$$

Abraham Wald (1902 – 1950)

Foto: Oberwolfach Photo Collection

Bsp. 2.20 (Ausflugs und Omlettenproblem)

Bsp. 2.21 (Maximin-Entscheidungsfunktion im Investitionsproblem)

Betrachten Sie das Investitionsproblem mit der in der in Kapitel 1.5 beschriebenen Informationsstruktur:

Datenfreies Entscheidungsproblem

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3
a_1	10 000	2 000	–15 000
a_2	1 000	1 000	0

Informationsstruktur

	x_1	x_2	x_3
ϑ_1	0.6	0.3	0.1
ϑ_2	0.2	0.4	0.4
ϑ_3	0.1	0.4	0.5

Notation wiederum:

$$d(i_1, i_2, \ldots, i_s) \quad \text{für} \quad d = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_s \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_s} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Maximin-Entscheidungsfunktion!

Datengestütztes Entscheidungsproblem: Auswertungsproblem

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	Minimum
$d(1,1,1)$	10 000	2 000	–15 000	– 15 000
$d(1,1,2)$	9 100	1 600	– 7 500	– 7 500
$d(1,2,1)$	7 300	1 600	– 9 000	– 9 000
$d(1,2,2)$	6 400	1 200	– 1 500	– 1 500
$d(2,1,1)$	4 600	1 800	–13 500	– 13 500
$d(2,1,2)$	3 700	1 400	– 6 000	– 6 000
$d(2,2,1)$	1 900	1 400	– 7 500	– 7 500
$d(2,2,2)$	1 000	1 000	0	– **0**

Berechnung/Auffinden von Minimax-/Maximin-Aktionen

Bem. 2.22 (Die graphische Bestimmung von Minimax/Maximin Aktionen bei zweielementigem Zustandsraum)

Bem. 2.24 (Vorüberlegung zur Bestimmung von Maximin-Aktionen über lineare Optimierung bei endlichen $\mathbb{A}$ und Θ)

Proposition 2.25 (Bestimmung von Maximin-Aktionen über lineare Optimierung)

Gegeben sei die gemischte Erweiterung $(\mathcal{M}(A), \Theta, u(\cdot))$ eines datenfreien Entscheidungsproblem in Nutzenform bei endlichem $\mathbb{A}$ und endlichem Θ. Die randomisierte Aktion $\lambda^* = (\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n))$ ist Maximin-Lösung genau dann, wenn sie Optimallösung des folgenden Optimierungsproblems ist:

$$M \longrightarrow \max_{M, \lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u(a_i,\vartheta_j)\lambda(a_i) &\geq M,\ j=1,\ldots,m,\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda(a_i) &= 1,\\ \lambda(a_i) &\geq 0, \quad i=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

i) Es entsteht also folgendes Standardmaximum-Problem in den Variablen $M,\lambda(a_1),\ldots,\lambda(a_n)$

$$M \longrightarrow \max_{M,\lambda(a_1),\ldots,\lambda(a_n)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
M - \sum_{i=1}^{n} u(a_i, \vartheta_1)\lambda(a_i) &\leq 0 \\
\vdots \qquad & \vdots \quad \vdots \\
M - \sum_{i=1}^{n} u(a_i, \vartheta_m)\lambda(a_i) &\leq 0 \\
\sum_{i=1}^{n} \lambda(a_i) &\leq 1 \\
-\sum_{i=1}^{n} \lambda(a_i) &\leq -1 \\
\lambda(a_1) &\geq 0 \\
\vdots \qquad & \vdots \quad \vdots \\
\lambda(a_n) &\geq 0 \\
M &\geq 0,
\end{aligned}
$$

wobei stillschweigend (wegen der Nichtnegativität von M) vorausgesetzt wurde, dass o. B. d. A. $u(a_i, \vartheta_j) \geq 0$ ist. (Sonst gehe man über zu $u(a_i, \vartheta_j) := u(a_i, \vartheta) - \min\limits_{i,j} u(a_i, \vartheta_j)$, was dieselben optimalen $\lambda(a_1), \ldots \lambda(a_n)$ liefert.)
Also:

$$(1, 0, \ldots, 0) \cdot \begin{pmatrix} M \\ \lambda(a_1) \\ \vdots \\ \lambda(a_n) \end{pmatrix} \longrightarrow \max_{M, \lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 1 & -u(a_1,\vartheta_1) & -u(a_2,\vartheta_1) & -\ldots- & u(a_n,\vartheta_1) \\ 1 & -u(a_1,\vartheta_2) & -u(a_2,\vartheta_2) & -\ldots- & u(a_n,\vartheta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -u(a_1,\vartheta_m) & -u(a_2,\vartheta_m) & -\ldots- & u(a_n,\vartheta_m) \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ \lambda(a_1) \\ \lambda(a_2) \\ \vdots \\ \lambda(a_n) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M \\ \lambda(a_1) \\ \vdots \\ \lambda(a_n) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sucht man die optimale unrandomisierte Aktion, so kann man diese auch mithilfe Boolscher Optimierung aus diesem Optimierungsproblem gewinnen.

Def. 2.26 (Equalizer-Aktion, Äquilisator-Aktion)

Eine Aktion $a \in \mathbb{A}$ mit in ϑ konstantem Nutzen heißt *Equalizer-Aktion* oder *Äqualisator-Aktion*.

Eigenschaften von Minimax-/Maximin-Aktionen

Bem. 2.28 (Tücken und formale Kritik des Maximin-Prinzips)

a) Bei unendlichen Mengen müssen Minimax/Maximin Aktionen nicht existieren $\longrightarrow$ Übergang zu ε-Minimax bzw. ε-Maximin Aktionen

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} u(a^*, \vartheta) \geq \inf_{\vartheta \in \Theta} u(a, \vartheta) - \varepsilon, \qquad \forall a \in \mathbb{A}$$

(wird eher selten betrachtet, jedenfalls in der Vorlesung gar nicht.)

b) Minimax/Maximin-Aktionen müssen nicht eindeutig sein.

c) Minimax/Maximin-Aktionen müssen nicht zulässig sein.

d) Kritik anhand der Metaregeln.

d1) Minimax/Maximin Kriterium ist nur bei endlichem Θ notwendig kompatibel mit der Dominanzrelation.

d2) Die Spaltenlinearität ist verletzt.

Satz 2.31 (Existenz Maximin-optimaler Lösungen bei endlichem Θ)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ mit endlicher Aktionsmenge $\mathbb{A}$ und endlichem Zustandsraum Θ. Dann existiert eine Maximin-Aktion in $\mathbb{A}$ und in $\mathcal{M}(\mathbb{A})$.
Beweis:

Korollar 2.33

Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die Menge aller Maximin-Lösungen konvex und abgeschlossen.

Bem. 2.34 (Maximin-Regel: Zusammenfassung und inhaltliche Kritik)